Problema 1

Punto 1

#1: $f(x) := 6 - x^2$

Determinazione intersezioni della parabola λ con l'asse x:

#2: $6 - x^2 = 0$

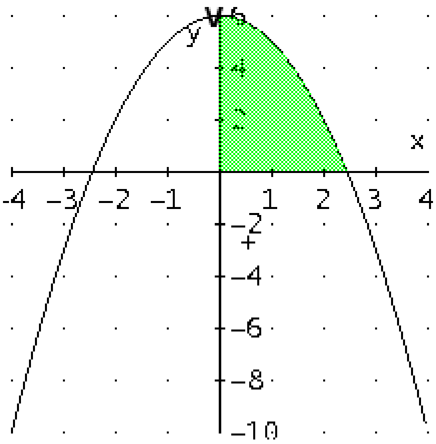
#3: $\mathrm{SOLVE}(6 - x^2 = 0, x)$

#4: $x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{6}$

La parabola ha vertice V(0,6)

#5: $\mathrm{AreaUnderCurve}(6 - x^2, x, 0, \sqrt{6}, Y)$

#6: $\left[6 - x^2, Y < 6 - x^2 \wedge x \le \sqrt{6} \wedge Y > 0 \wedge x \ge 0\right]$



Per calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando R attorno all'asse y si deve determinare la corrispondente funzione inversa g(y) nell'intervallo [0,√6]

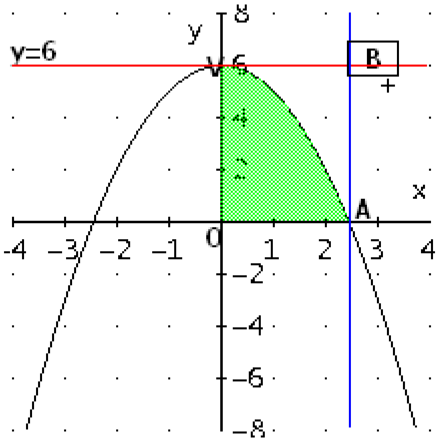
#7: $g(y) := \sqrt{(6 - Y)}$

#8: $\mathrm{Vol1} := \pi \cdot \int_0^6 g(Y)^2 \, dY$

#9: $\mathrm{Vol1} := 18 \cdot \pi$

Punto 2

Si deve calcolare il volume Vc del cilindro ottenuto dalla rotazione del rettangolo VOAB attorno alla retta y=6 al quale deve essere sottratto il volume V2 ottenuto dalla rotazione del triangolo mistilineo VAB attorno alla retta y=6



#10: $Vc := 36\cdot\pi\cdot\sqrt{6}$

#11: $V2 := \pi\cdot\int_{0}^{\sqrt{6}} (f(x) - 6)^2 \, dx$

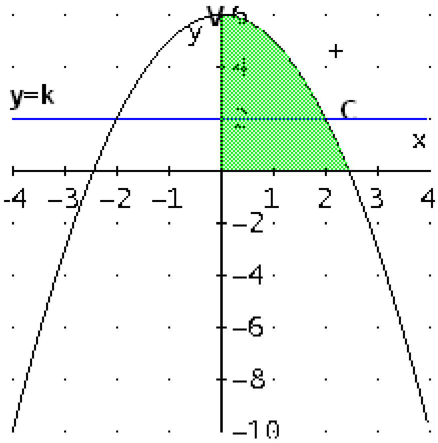
#12: $$V2 := \frac{36\cdot\sqrt{6}\cdot\pi}{5}$$

#13: $Vol2 := Vc - V2$

#14: $$Vol2 = \frac{144\cdot\sqrt{6}\cdot\pi}{5}$$

Punto 3

Si determina ora il valore di k per cui la retta y=k dimezza l'area R



#15: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[Y = 6 - x^2, Y = k\right], [x, Y]\right)$

#16: $$[x = \sqrt{(6 - k)} \wedge Y = k, x = -\sqrt{(6 - k)} \wedge Y = k]$$

Allora C ha ascissa √(6-k)

#17: $\text{areaR} := \int_0^{\sqrt{6}} f(x)\, dx$

#18: $\text{areaR} = 4\cdot\sqrt{6}$

#19: $\text{area}(k) := \int_0^{\sqrt{(6-k)}} (f(x) - k)\, dx$

#20: $$\text{area}(k) = \frac{2\cdot(6-k)^{3/2}}{3}$$

#21: $$\text{SOLVE}\left(\text{area}(k) = \frac{\text{areaR}}{2}, k\right)$$

#22: $$k = 6 - 3\cdot 2^{1/3}$$

Punto 4

Si determina il coefficiente angolare di una retta tangente a λ

#23: $$\frac{d}{dx} f(x) = -2\cdot x$$

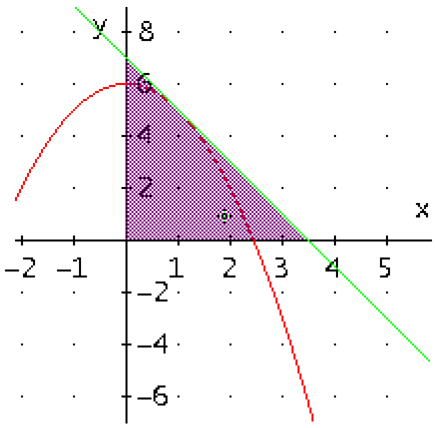
L' equazione della retta tangente alla parabola nel punto di ascissa t è:

#24: $Y = -2\cdot t\cdot(x - t) + 6 - t^2$

#25: $$Y = -2\cdot t\cdot x + t^2 + 6$$

#26: $\text{AreaUnderCurve}\left(-2\cdot x + 7, x, 0, \frac{7}{2}, Y\right)$

#27: $$\left[7 - 2\cdot x, Y < 7 - 2\cdot x \wedge x \le \frac{7}{2} \wedge Y > 0 \wedge x \ge 0\right]$$



Si terminano i punti d' intersezione con gli assi della retta tangente a λ nel punto di ascissa t

#28: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[Y = -2\cdot t\cdot x + t^2 + 6,\ Y = 0\right],\ [x,\ Y]\right)$

#29: $$\left[x = \frac{t^2 + 6}{2\cdot t} \wedge Y = 0\right]$$

#30: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[Y = -2\cdot t\cdot x + t^2 + 6,\ x = 0\right],\ [x,\ Y]\right)$

#31: $$\left[x = 0 \wedge Y = t^2 + 6\right]$$

Quindi l'area A(t) del triangolo è:

#32: $$A(t) := \frac{\frac{t^2 + 6}{2\cdot t}\cdot(t^2 + 6)}{2}$$

#33: $$A(t) = \frac{(t^2 + 6)^2}{4\cdot t}$$

#34: $$A(1) = \frac{49}{4}$$

Punto 5

Si studia il segno della derivata prima di A(t) per ricavare il punto di minimo fra 0 e √6

#35: $$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{3\cdot(t^2 - 2)\cdot(t^2 + 6)}{4\cdot t^2}$$

#36: $$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{3 \cdot t^4 + 12 \cdot t^2 - 36}{4 \cdot t^2}$$

#37: $\text{SOLVE}(3 \cdot t^4 + 12 \cdot t^2 - 36, t)$

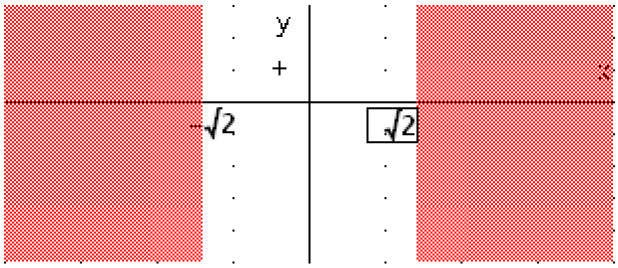
#38: $$t = -\sqrt{6} \cdot i \vee t = \sqrt{6} \cdot i \vee t = -\sqrt{2} \vee t = \sqrt{2}$$

Il segno di A'(t) dipende solo dal numeratore:

#39: $3 \cdot t^4 + 12 \cdot t^2 - 36 > 0$

#40: $\text{SOLVE}(3 \cdot t^4 + 12 \cdot t^2 - 36 > 0, t)$

#41: $$t < -\sqrt{2} \vee t > \sqrt{2}$$



Allora A(t) è minima per t=√2