CampuStore
Media Direct Srl Brand
Via Villaggio Europa, 3
36061 Bassano del Grappa (VI) - Italy
R.I. VI, C.F. e P.IVA: 02409740244

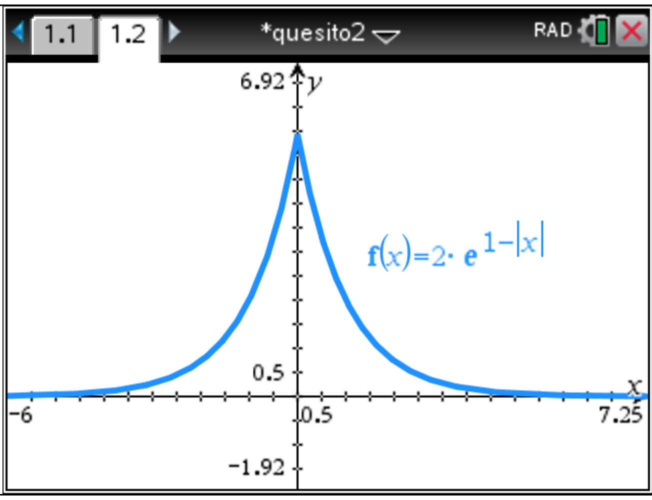
Esempio di Prova di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 28.02.2019
QUESITO 2 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T[3] Italia - Teachers Teaching with Technology

2. Sia $\mathcal{R}$ la regione piana compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y = 2e^{1-\lvert x\rvert}$. Provare che, tra i rettangoli inscritti in $\mathcal{R}$ e aventi un lato sull'asse x, quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.

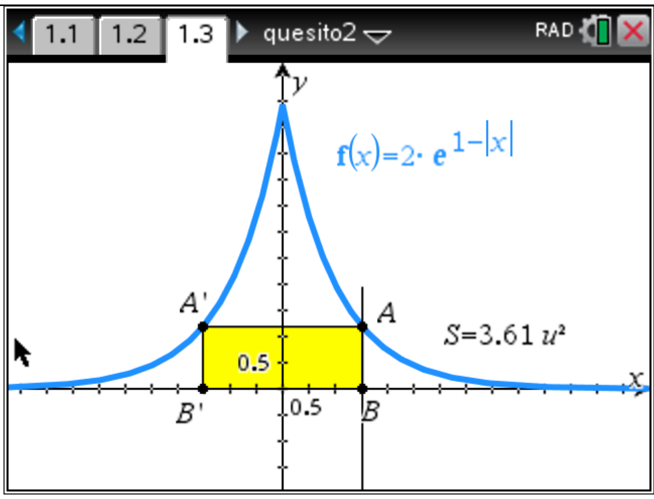
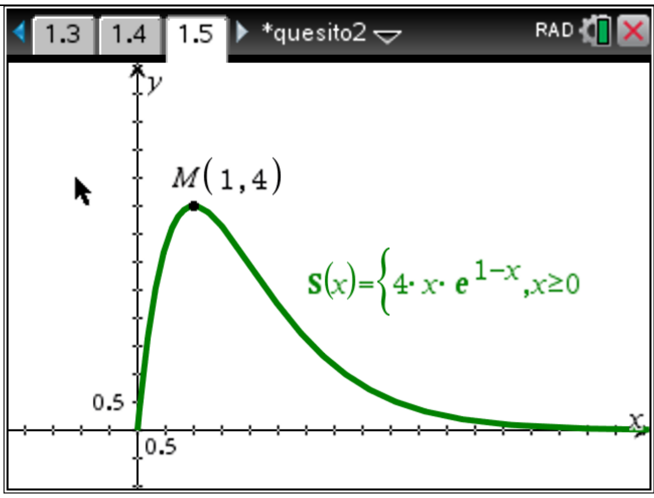
Soluzione

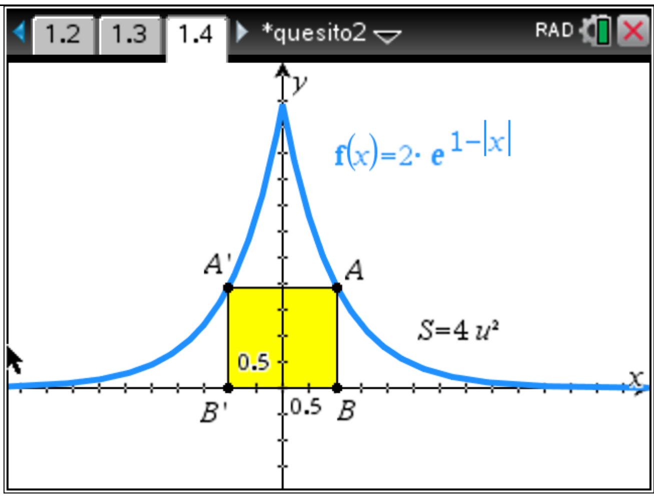
La funzione $f(x)=2e^{1-\lvert x\rvert}$ ha per dominio R; è pari, positiva ed ha per asintoto orizzontale l'asse delle ascisse.
È una funzione continua, ma in $x=0$ non è derivabile ed ha un punto angoloso.
Con la calcolatrice grafica, si può ottenere immediatamente il grafico della funzione: $f(x)=2\cdot e^{1-\lvert x\rvert}$.
Per motivare questo grafico occorre fare un rapido studio di finzione, riportato di seguito.



Per $x \geq 0$ si ottiene $f(x)=2e^{1-x}$, la cui derivata prima è $f'(x)=-2e^{1-x}$. Quindi la funzione è decrescente per $x \geq 0$ e tende a zero per $x \to +\infty$.
La derivata destra nel punto $x=0$ è pertanto $f'_{+}(x)=-2e$.

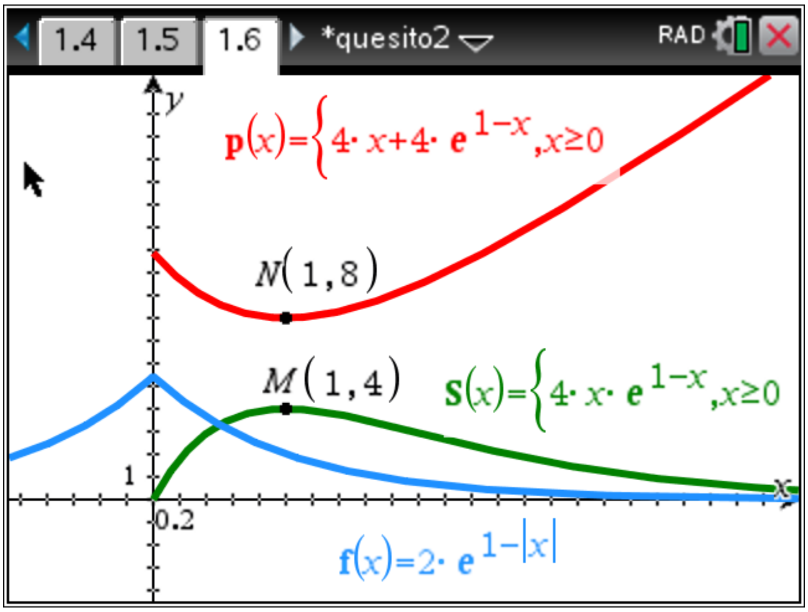
Per $x \geq 0$ la derivata seconda è $f''(x)=2e^{1-x}$, che è positiva. Pertanto la funzione $f(x)$ è convessa in tutto il suo dominio (dato che è pari).

<table>
<tr>
<td>Inscriviamo un rettangolo con un lato sull’asse delle ascisse. Si ottiene la figura riportata a fianco. Si usa l’applicazione Geometria della calcolatrice grafica TI Nspire CX.
Si crea un punto A sul grafico della funzione (con $x \geq 0$). Si crea il simmetrico di A rispetto all’asse y. Si proietta A sull’asse delle ascisse usando lo strumento “Retta perpendicolare”.
Il rettangolo è simmetrico rispetto all’asse y.
Supponiamo $x \geq 0$.
Le coordinate del punto A sono $\left(x; 2e^{1-x}\right)$.
L’area del rettangolo, per $x \geq 0$, è:
$S(x) = 4xe^{1-x}$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>La calcolatrice grafica permette di tracciare immediatamente il grafico della funzione $S(x)$ che rappresenta l’area del rettangolo (vedi grafico a fianco) e permette di trovare il massimo (usando lo strumento “Analizza grafico>Massimo).
Questa funzione ha il suo massimo relativo (e assoluto) per $x = 1$.
Il massimo dell’area è 4.
In tale caso la base del rettangolo ha la stessa misura dell’altezza.
Quindi il rettangolo di area massima è il quadrato di lato 2.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>La derivata prima di $S(x)$ è quindi:
$S'(x) = 4\left(e^{1-x} - x\,e^{1-x}\right) = 4e^{1-x}(1-x)$,
con $x \geq 0$.
Il massimo dell’area si ha per $x = 1$ e vale $S(1) = 4$.
In tale caso la base del rettangolo e l’altezza misurano 2. Quindi il rettangolo di area massima è il quadrato di lato 2.

Il perimetro del rettangolo è dato da:
$p(x) = 4x + 4e^{1-x} = 4(x + e^{1-x})$, con $x \geq 0$.
La derivata prima è:
$p'(x) = 4(1 - e^{1-x})$. Il minimo del perimetro si ha quindi per $x = 1$. Quindi si ottiene lo stesso quadrato di lato 2 trovato in precedenza.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Altro modo di procedere

Si costruiscono la funzione area e la funzione perimetro del rettangolo e si rappresentano i grafici per $x \geq 0$ nella stessa pagina Grafici della calcolatrice.
Analizzando le curve si individuano un massimo per l'area e un minimo per il perimetro in corrispondenza dello stesso valore dell'ascissa $x = 1$. L'area massima vale 4 e il perimetro minimo vale 8, come si osserva dal seguente grafico.



Commento sintetico

Livello di difficoltà stimato del quesito: medio.
L'argomento è presente nel QdR di Matematica? Sì.
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale? Sì.
Per la risoluzione del problema l'uso della calcolatrice grafica permette di disegnare rapidamente il grafico della funzione iniziale, il grafico della funzione area del rettangolo e il grafico della funzione che rappresenta il perimetro del rettangolo, determinandone rispettivamente il massimo ed il minimo.