

Esempio di Prova di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 28.02.2019

QUESITO 5 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

(soluzione a cura di: Formatori T3 Italia)

5. Si consideri la superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.
- Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ e la superficie S sono secanti.
 - Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e S .

Soluzione

Il centro della sfera ha coordinate $C \equiv (1, 0, -3)$.

Il raggio della sfera è:

$$r_s = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

La distanza tra il centro C della sfera e il piano π è:

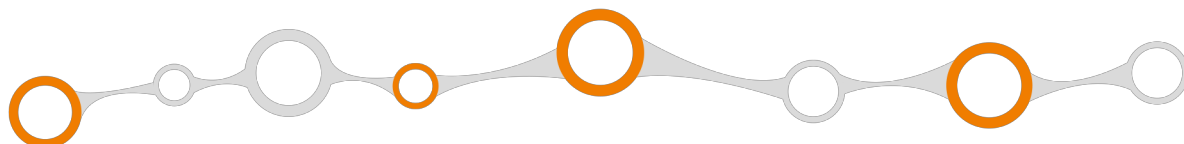
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 6 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{14}{7} = 2.$$

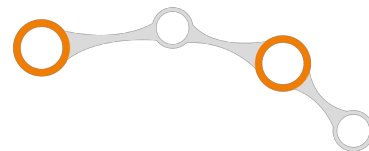
Poiché $d < r_s$, il piano è secante alla sfera.

Quindi il raggio della circonferenza si determina con il teorema di Pitagora (il raggio della sfera è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo):

$$r_c = \sqrt{r_s^2 - d^2} = \sqrt{10 - 4} = \sqrt{6}.$$

La calcolatrice grafica, in questo quesito, può dare solo un aiuto per la visualizzazione del piano e della superficie sferica.





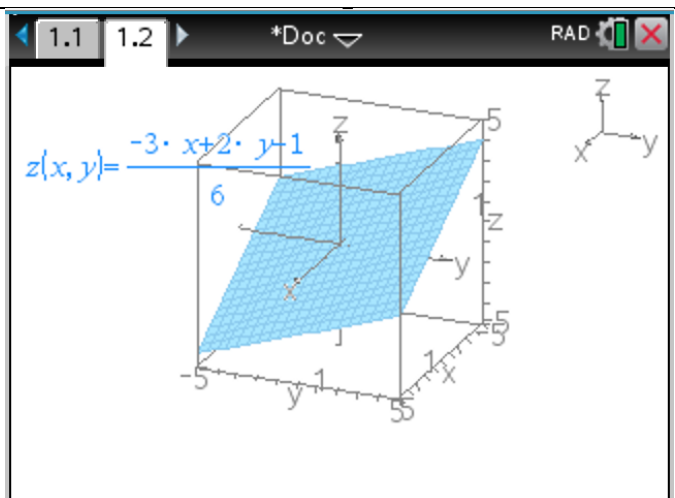
La calcolatrice permette di disegnare il piano (come funzione di due variabili x e y).

Inserire una pagina di tipo grafici:

Ctrl>Doc>Aggiungi e poi
Grafici>Menu>Vista>Rappresentazione
grafica 3D.

Per disegnare il piano, occorre inserire nella
riga di inserimento la funzione di due
variabili:

$$z(x, y) = \frac{1}{6}(-3x + 2y - 1)$$

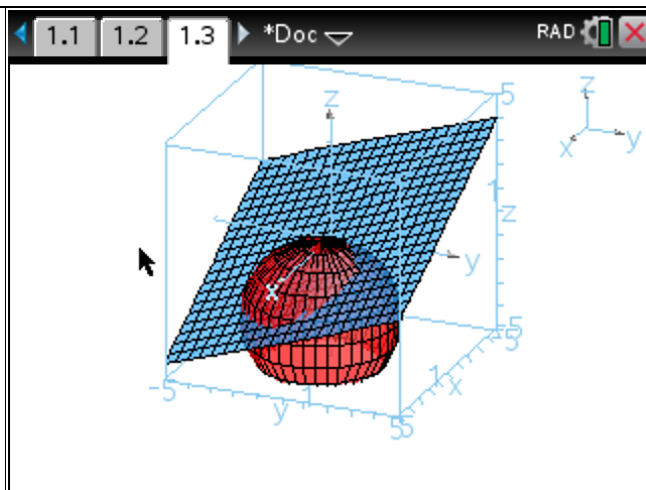


La calcolatrice può aiutare a disegnare la
sfera come unione dei grafici di due funzioni
in due variabili:

$$s_1(x, y) = \sqrt{\frac{2x - x^2 - y^2 - z^2}{6}}$$

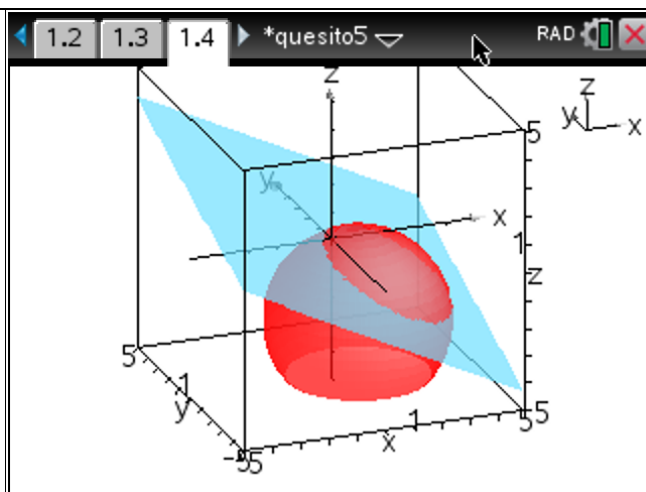
$$s_2(x, y) = -\sqrt{\frac{2x - x^2 - y^2 - z^2}{6}}$$

Si osserva che il piano interseca la superficie
sferica in una circonferenza.



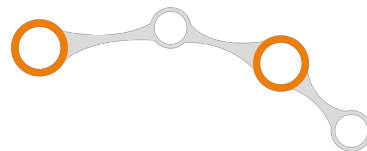
Togliendo il reticolo sia sul piano che sulla
sfera, si può migliorare un po' la
visualizzazione della intersezione tra il piano
e la sfera come indicato qui a fianco.

Premere Menu per visualizzare le varie
opzioni.



Commento





Livello di difficoltà stimato del quesito: medio.

L'argomento è presente nel QdR di Matematica. Sì.

Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale? Sì

Per la risoluzione del problema l'uso della calcolatrice grafica permette una visualizzazione della situazione geometrica (il piano è secante alla superficie sferica).

Il quesito è prevalentemente teorico e la calcolatrice permette di risolverlo solo per una parte.

